线性代数课程教学中的一些体会

郭仲凯
（中南民族大学，湖北 武汉 430074）

摘 要：本文主要从线性方程组的角度探讨线性代数中的一些基本概念以及基本方法的产生，引导学生如何从初等数学中解简单方程组跨越到如今的大学课程线性代数，从而为大学一年级新生学习线性代数课程提供一定理解与帮助。

关键词：线性代数；线性方程组；矩阵；行列式

作为刚进入大学的学生来说，转变数学思维方式以及学习方式显得尤为重要，再也不能像高中那样用题海战术学习某门课程，其原因有多方面的，比如大学课程多任务重，每节课都是新内容，不会有大量的时间留给学生刷题，学生需要理解所学内容中包含的重要思想以及知识结构、前后知识之间的关联，其后再通过自己的课后练习达到熟悉相关理论与技巧。

线性代数是大学一年级公共必修课程，通过多年教学观察与发现，许多学生觉得线性代数课程比微积分难学。但是总的来说，线性代数所涉及的知识并没有微积分多，那么为什么学生会觉得线性代数课程会比微积分要难学呢？我想其主要原因是没有把知识点前后联系，没有站在一个好的角度来看待线性代数所想要解决的问题，以及为了解决这些问题所引出的基本概念。本文以作者多年教学经验的基础上来讨论如何看待线性代数这门课程以及如何把握其中的基本概念以及学习方法。

我们学校所用的教材为：张军好、余启港、欧阳露莎老师所编写的教材，其书本结构大致可以分为两部分，第一至第四章为就如何解线性方程组展开了讨论。第二部分为第五至第六章，主要讨论了方阵以及对称方阵的一些基本理论与应用。

第一章作为教材的开始，先引入如下问题，即如何求解方程组 $\begin{cases}3x+4y=1\\4x+3y=2\end{cases}$（*）的解等相关问题，这不得不说是一个好故事开端，其一，这样的问题是大家所熟悉的。其二，这为接下来我们要讲的知识架了一个非常好的桥梁。其三，从中学生也能初步感悟数学到底是怎么思考的，从特殊到一般，总结归纳是数学常用的手段，在此体现的淋淋尽致。总的来说，第一章所解决的问题最终体现是克莱姆法则，即对于（*）式方程最一般的情形给出一个答复，为了解决这个问题，我们引入了行列式的概念，引入逆序数的概念，从而引入了行列式的定义，最后用行列式把一类方程组的解用行列式的比表示出来，这就是第一章所讲的故事，然而这只是这个故事的大体结构，为了完整的把方程组的解解出来，而不仅仅是表示出来，我们接下来所需要的做的工作就是如何计算行列式，从而引出上三角下三角以及对角矩阵等概念，以及计算行列式的三种基本性质，如交换两行、倍行、倍行加。同时也讲解了其他计算方法，如按某一行某一列展开方法以及按多行多列展开，至此第一章内容算是圆满的解答了同学们初中阶段所熟悉的方程组以及相应的一般形式。第二章的主题是矩阵，当然我们也可以方程的角度来理解为什么要引入矩阵来解方程，比如如果我们考虑如下方程则发现克莱姆法则马上就会失效：$\begin{cases}x+y=1\\x+y=1\end{cases}$（**）究其原因是因为系数行列式等于零，因此自然而然需要寻找新的方法以及新的工具以及概念。为此引入矩阵的概念，其和方程组是一一对应的关系，这是数学研究中常用的手法，正因为一一对应，所以我们把研究线性方程组的问题转化成研究矩阵即可。首先我们定义了矩阵的概念，然后讨论了矩阵的加减乘逆（除），以及定义这些概念所需满足的条件，之后又考虑了矩阵的一些运算律，在矩阵的理论框架下我们发现矩阵运算不满足消去律和交换律，这是新概念与思维中固有的结果不同（数之间的运算律），因此这些结论需要学生在用的时候一定要转变自己的固有思维方式，不可思维定式，否则运算就会出错。在第二章中为了定义矩阵的逆（除法），我们首先需要考虑一些基本的概念，如矩阵的转置矩阵、矩阵的伴随矩阵，最后我们可以通过以上概念得到矩阵逆的概念，由此不难从概念的发展经历可以看出，首先是有转置，然后有伴随，最后才有逆的定义，细心的同学就会发现，这几种运算在某些地方是非常相似的，而且这几种运算的混合运算满足交换律，我们可以认为这是概念之间的遗传性质所导致的。正如我们之前所述，线性方程组与矩阵之间是一一对应的，所以接下来我们将考虑如何应用矩阵来解线性方程组，要知道解方程学生们初中就接触过了，因此不难理解解方程中最重要的方法是消元法，以及交换方程的位置，给线性方程组中某一方程乘以某倍数，对应的在矩阵中我们这三个处理方法，我们称之为初等变换，由此不难理解为什么初等变换如此之重要，因为对于解方程来说有什么会比消元法更重要。事实上许多概念都是由以前初中所学的一种新的称呼，比如行阶梯形、行最简形，只要学生稍微举个简单例子就可以看出，这些个概念在解方程的时候多对应的方程组形式，这就要求同学们多加揣摩，现在所学的知识与以前所学的知识之间哪些本质上是一样的，只是换了个说法而已，由此加深对概念的理解，从而达到灵活运用。接下来我们考虑另一个重要的概念：秩。书本上所定义的秩是由秩子式决定的，通过一些推导给出了如何算出秩的大小，即行阶梯形的阶梯个数，那么秩这个概念回到方程又是怎样去理解呢？比如考虑如下方程：

$\begin{cases}x+y=1\\x+y=1\end{cases}$ 通过与矩阵对应，然后用初等变换可得秩为一。什么是一呢？不难看出方程组的有效方程的个数是一，所以秩的概念可以从某种意义上可以理解为有效方程的个数，最后第四章判定齐次线性方程组与非齐次线性方程组解的存在唯一以及不唯一判定定理就是由秩决定的。比如我们考察如下方程组：$\begin{cases}x+y=1\\x+y=0\end{cases}$ 同学都知道这个方程组是无解，那么其无解的本质是什么呢，判定定理给出了答复，即其系数矩阵的秩与增广矩阵的秩是不相等的，数学通常是研究一种共性，或者说某些东西的本质。第三章我们研究线性相关线

基金号：国家自然科学基金 11801575。

性无关的概念,那么我们不禁要问,为什么要研究这种概念,当然这样的问题会有很多答案,但如果从线性方程组的角度来说,引入线性相关线性无关的概念是为了研究方程解的结构,因为我们知道,有些方程组是有无穷多个解,那么怎么表示就是个需要解决的问题,不能把无穷多个解一一写出来,此法显然不可取,也不现实,因此有了极大线性无关组的概念用来弄清楚方程组这无穷多个解到底如何表示,为此还需要一些空间的概念,因为齐次线性方程组的解构成一个空间,所以为了完整解决方程组解的各种问题,这些概念是必须的也是自然的。前四章内容大概就是围绕如何解线性方程组展开而写的。第五章第六章属于矩阵中一类特殊的矩阵研究,即方阵以及对称矩阵,我们研究了方阵的特征值特征向量等概念,这些概念在做更深入的数学研究你会发现是有非常重要的作用,其决定了在某些问题研究中如何简单化。作为特征值特征向量,其特征二字作何体现,不难发现关于特征值的两个性质足以说明这些概念的重要性以及为何取名特征值,其隐藏了矩阵的某些信息,而且特征值特征向量决定了矩阵是否可以对角化,从某种意义上来说,对角化即是把矩阵简单化,从而在某些问题的处理上得到简化,这些结果都说明了特征值特征向量这两个概念的重要性,最后一节书上讨论了对称矩阵的对角化,其结果是对称矩阵一定可以对角化。由此过度到第六章,第六章标题虽然为二次型,但从定义出发我们很快就能得出,二次型其实与实对称矩阵一一对应,因此问题的本质是实对称矩阵,因此第五章最后一节的结论对第六章来说显得尤为重要。最终二次型的正定性或者负定性判定转化成对角矩阵对角线元素所决定,更一般的我们得到了实对称矩阵正定性判定是由特征值所确定的,即如果实对称矩阵的全部特征值都是大于零的则矩阵正定,反之若实对称矩阵的特征值小于零则矩阵为负定矩阵。

由此,我们可以得出,学习线性代数,不仅需要学生在运算上要仔细认真,更重要的是知其然亦知其所以然才行,即要先了解线性代数这门学科的骨架,然后再去一步步的把具体的知识点补齐,这样看起来才有血有肉,学习起来有的放矢,有根有叶。当然说起来简单,但做起来不容易。正所谓数学听懂只是学习数学最基本的一步,课后要自己多去动手运算,把相关知识点通过练习做到滚瓜烂熟,一步一步以扎实的步调迎接新的概念新的方法,否则很容易掉队,从而失去学习的积极性,最后在一堆枯燥的概念中打转,如此则得不偿失,即浪费了时间又没有取得好的效果。总之,不仅是学习线性代数课程,其他课程也是一样,要眼脑手三者衔接好,做到上课认真听讲,课后认真练习,尽量看清事物发展的脉络,如此我相信学习线性代数并不是什么难事。