基于汽车专业背景下的复合函数求导教学探索

周 潜
（湖南工业职业技术学院，湖南 长沙 410000）

摘 要：基于汽车专业背景，采用发现教学法，问题驱动，实验探究，将复合函数求导法则形象的渗透在齿轮传动案例中，引导学生发现学习，同时拓展复合函数求导在汽车发动机中的应用，增强学生的体验感和获得感。

关键词：复合函数求导；发现教学法；汽车专业

高等数学是汽车专业学生的重要基础课之一，而一元函数的导数是高等数学的基础，其中复合函数求导属于函数求导中的重点。实践中发现，学生学习高等数学的原始动机并不算强烈，预习、复习时存在功利性的现象，对复合函数求导的认识多倾向于陈述性知识的机械性理解，缺乏对过程性知识的体验和感悟，而过程性知识在较大程度上影响着学生应用导数理解和解决汽车专业实际问题的能力。尽管如此，但学生的学习主动性相对较易调动。

本文将试图引入复合函数求导的过程性知识，从汽车专业学生感兴趣的齿轮传动案例入手，采用布鲁纳发现教学法，问题驱动，实验探究，引导学生从案例中主动发现规律，进而主动提炼出复合函数求导法则；与此同时，拓展复合函数求导在汽车发动机中的应用，强化复合函数求导计算的同时，增强学生的体验感和获得感，培养学生的探索精神和“发现学习”习惯。

1 创设问题情境

（1）案例引导与问题驱动。首先观看机械制造中的齿轮传动视频，感受这种看似简单而又神奇的齿轮传递，为后续主动发现复合函数求导的链式法则做铺垫。过程中应思考，若已测得各齿轮的半径，当已知其中一个齿轮的转速时，如何确定其他所有齿轮的转速？课堂前五分钟至关重要，一定程度上决定了教学设计能否高质量实施，汽车专业学生普遍对机械制造感兴趣，而在一元函数的导数概念教学中，学生已经了解，导数本身是一种变化率，齿轮传动装置正好可以很好的展示变化率的传递过程[1]，故从齿轮传动技术引入，采用生动形象的画面感，迅速集中学生的注意力，点亮专业情怀与学习动力，触发学生的联想与思考，奠基发现教学法的展开。

（2）实验探究。齿轮传动设备如图 1，已知 A、B、C 三个齿轮的半径分别为 8CM、4CM、2CM，当齿轮 A 旋转 x 圈，B 旋转 u 圈而 C 旋转 y 圈时，请各小组学生完成以下 3 个任务，并将过程和结果进行展示。

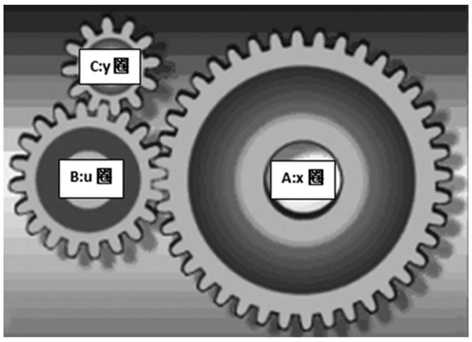

图 1 齿轮链

任务 1，指出，当 A 旋转 1 圈时，B、C 分别旋转了多少圈；

任务 2，找出 x，u，y 的关系表达式；

任务 3，求出 y 对 u 的导数，u 对 x 的导数，y 对 x 的导数。

在问题驱动的背景下，采用分组实验探究的方法，一是实验内容的需要，为接下来的发现教学提供素材；二是增强学生的过程体验感、获得感，利于学生主观能动性的充分发挥；三是强化团队精神，一种无声的课程思政。

2 发现新知

首先对各组实验结果进行组间互评和教师点评，然后，请各小组长直接板书列出准确的结果。基于实验探究结果，采用直观呈现，引导发现的方式展开，利于学生主动发现复合函数求导思想的雏形，是发现教学法的关键环节之一。由齿轮半径可得齿轮周长，那么易知，A 旋转 1 圈时，B 转了 2 圈，C 转了 4 圈。据各齿轮之间的周长关系，不难得出：

$$y=f(u)=2u, u=\varphi(x)=2x, y=f(\varphi(x))=2\times 2x=4x.$$

$$\frac{dy}{du}=2, \frac{du}{dx}=2, \frac{dy}{dx}=4.$$

引导学生发现，此处 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 这是偶然的吗?

在导数的概念中已经明确，导数可以理解为一种变化率，那么 $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}$ 均是变化率，当 y=f(u)的变化是 u 的变化的 2 倍那样快，而 u=φ(x)的变化又是 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 的变化的 2 倍那样快，那么可以直观的预期，y 的变化就是 x 的变化的 4 倍那样快，这正是变化率的传递过程，最终的 C 齿轮相对于 A 齿轮转动的变化率等于中间过程的变化率乘积，故在齿轮传动案例中，在直观上是存在的。

接下来，告知学生，实验探究发现的变化率传递现象可以抽象出复合函数的链式求导法则，请各小组尝试提炼，给出复合函数的求导法则。

3 提炼强化新知

（1）新知提炼。结合齿轮传动案例，针对同学们提炼出的复合函数求导法则，采用组间互评和教师点评，其目的是双重强化。让学生主动提炼出复合函数的求导法则，而不是被动的接受，进而自然的总结出严谨的复合函数求导法则。

复合函数求导法则：设 u=φ(x)在点 x 处可导，y=f(u)在对应的 u 处可导，则复合函数 y=f[φ(x)]在点 x 处可导，且 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 或记为 $(f[\varphi(x)])'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$[2]。

接下来，顺势给出复合函数求导的数理证明，在直观感受复合函数求导法则的基础上进行理论强化。

复合函数求导法则，展示出了最终变化率等于中间过程变化率的乘积，由此，课程思政自然触发，人生亦是如此，当前的人生高度，一定程度上是我们过去所做的一切的累乘，过去的每一次努力都是累乘所用到的元素，努力越多，最后的乘积就越大，人生高度就越高。

（2）实例强化。

设 y=ln sinx，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：y=ln sinx 可看成 y=ln u，u=sin x 两个函数复合而成，因此，据复合函数求导法则可知：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cos x=\cot x$$

联想齿轮传动案例，易知，复合函数求导法则作为结果，可以推广到多个中间变量的情况。我们以两个中间变量为例，设 $y=f(u)$，$u=h(v)$，$v=\varphi(x)$都可导，对于复合函数 $y=f(h(\varphi(x)))$的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dy}{dx}$$

4 应用拓展——发动机的奥秘

汽车发动机内的活塞上下运动，活塞在 t 秒的位置为

$s=A\cos(2\pi bt)$

其中 A 为活塞运动的最大幅度，b 为运动频率，试探索，为什么频率增大时，发动机容易被损坏[1]。

首先概念梳理，位移关于时间的导数是速度 v，速度关于时间的导数是加速度 a，而加速度关于时间的导数是急推 j，也就是大家乘坐汽车时，汽车加速度突然变化，直观感受可能是推背感，也可能是手中的饮料洒出等等，急推的值越大，说明其瞬间发动机的内力越大，越容易被损坏。注意，这里的 $s=A\cos(2\pi bt)$显然是一个复合函数，综上可知：

$$v(t)=\frac{ds}{dt},a(t)=\frac{d^2s}{dt^2},j(t)=\frac{d^3s}{dt^3}.$$

其次，具体计算环节，引导学生采用手工计算，MATLAB 校验的方式自主完成。

解：$s=A\cos u$，$u=2\pi bt$，2 个函数的复合，那么根据复合函数求导法则可知：

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{du}\frac{du}{dt}=-A\sin u\bullet 2\pi b=-2\pi bA\sin(2\pi bt). \tag{1}$$

$$a(t)=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=-4\pi^2b^2A\cos(2\pi bt). \tag{2}$$

$$j(t)=\frac{d^3s}{dt^3}=\frac{da}{dt}=8\pi^3b^3A\sin(2\pi bt). \tag{3}$$

由(3)式可知，假设发动机频率 b 放大为 2 倍，变为 2b，其急推的最大值呈指数增长，将从 $8\pi^3b^3A$ 放大为 $8\cdot 8\pi^3b^3A$，直接放大了 8 倍，这就是为何发动机活塞频率增大时，发动机容易被损坏的原因。

5 结束语

导数的实际应用，往往不是做不到，而是想不到，因此，基于汽车专业背景的导数教学，不局限于讲授数学结论及用法等陈述性知识，应重视过程性知识的导入，探索与汽车专业知识的合理融合，并开展丰富的教学活动，让课堂鲜活起来，让思维活跃起来。一方面可提高学生的学习兴趣，增强学生的体验感和获得感；另一方面，真正提高学生应用导数解决专业相关问题的能力。

参考文献

[1](美)Finney，Weir，Giordano.托马斯微积分[M].叶其孝等译.北京：高等教育出版社，2003.

[2]黄立宏，彭向阳，李继猛.高等数学.上(第四版)[M].上海：复旦大学出版社，2014.