RMI 原则在反证法解题中的应用

杨树瑞,王立波
(北华大学数学与统计学院,吉林 吉林 132013)

摘　要:RMI 原则是指一种分析处理问题的普遍方法或准则,使用 RMI 原则进行解题,能够将问题化繁为简进行处理,有利于培养学生的数学思维能力。本文通过实例分析解题思路,阐述 RMI 原则在反证法解题中的应用。

关键词:RMI 原则;反证法;解题
【DOI】10.12231/j.issn.1000-8772.2021.02.262

关系映射反演原则（简称 RMI 原则）是由徐利治教授于 1983 年首先提出,RMI 原则作为一种重要的数学思想方法，是体现在数学教材的各个方面的[1],这一原则在数学解题中有着十分重要的应用,本文主要阐述 RMI 原则在反证法解题中的应用。

1 相关概念

1.1 反证法的基本概念

用反证法来证明命题 p⇒q,实际是证明命题¬ q⇒¬ p 成立,由于命题 p⇒q 与其逆否命题¬ q⇒¬ p 等效，所以也就证明了 p⇒q 成立。虽然孙宗明教授对反证法本身的叙述并没有错误,但他认为反证法的实质是“证原命题的逆否命题成立”,这样就大大缩小了反证法的外延,因而可能造成使用反证法时的局限[2]。肖学平教授将反证法定义为:假设一个命题 p⇒q,反证法就是从¬ q 出发,只要能导致矛盾就行,这个矛盾可以是与已知条件矛盾、与假设矛盾或自相矛盾等。因此反证法的关键在于推出矛盾[3]。

1.2 RMI 原则的基本概念

给定一个含有目标原像 X 的关系结构系统 S,如果能找到一个可定映映射 Φ,将 S 映入或映满 S^*,则可从 S^* 中通过一定的数学方法把目标映像 $X^*=\Phi(X)$确定出来,从而通过反演即逆映射 Φ^{-1} 便可把 $X=\Phi^{-1}(X^*)$确定出来。全过程包括的步骤为:关系-映射-定映-反演-得解[4]。

其实从 RMI 原则的视角下去运用反证法进行解题，问题就会变得更加清晰明了。以原命题为关系结构系统 S,借助映射 Φ 映射到 S^*,这个 Φ 就是结论的反面,或局部结论的反面,然后在 S^* 中进行推理论证,一旦导出矛盾,利用 Φ^{-1} 就可得到 S 系统的有关命题,从而使原命题得到论证[5]。

2 RMI 原则在反证法解题中的应用

(1)通过证明逆否命题来证明原命题[6]。

例:△ABC 的三边 a、b、c 的倒数成等差数列,求证:B<90°。

利用 RMI 原则进行解题:

分析:原像关系结构:△ABC 的三边 a、b、c 的倒数成等差数列;

未知原像目标:B<90°;

映射:结论不成立;

映射关系结构:假设 B≥90°;

未知映射目标:△ABC 的三边 a、b、c 的倒数不成等差数列;

反演:a、b、c 的倒数不成等差数列与已知条件 a、b、c 的倒数成等差数列相矛盾,说明假设不成立;

得解:B<90°。

(2)把¬ q 作为前提,且与已知前提 P 相结合作为条件,推出与前提 p 互相矛盾的¬ p[6]。

例:求证形如 4n+3 的整数 p(n∈Z)不能化为两个整数的平方和。

分析:原像关系结构:p 是形如 4n+3 的整数;

未知原像目标:p 不能化为两个整数的平方和;

映射:结论不成立;

映射关系结构：假设 p 能化为两个整数的平方和且 p 是形如 4n+3 的整数;

未知映射目标:p≠4n+3;

反演:p≠4n+3 与已知条件 p 是形如 4n+3 的整数相矛盾,说明假设不成立;

得解:形如 4n+3 的整数 p(n∈Z)不能化为两个整数的平方和。

(3)把¬ q 作为前提,与已知前提 P 相结合作为条件,推出互相矛盾的两个命题 r 与¬ r.其中包括与公理、定理、已知真命题相矛盾的情形[6]。

例：设 E、F 为线段 BC 上两点,BE=CF,A 为 BC 外一点,∠BAE=∠CAF.求证:AB=AC.

分析：原像关系结构:E、F 为线段 BC 上两点,BE=CF,A 为 BC 外一点,∠BAE=∠CAF ;

未知原像目标:AB=AC;

映射:结论不成立;

映射关系结构:假设 AB≠AC,则 AB>AC 或 AB<AC;

未知映射目标:AB>AC 且 AB<AC;

反演:AB>AC 且 AB<AC,这个结果是自相矛盾的,说明假设不成立;

得解:AB=AC。

(4)把¬ q 作为前提,与已知前提 p 相结合作为条件,推出与¬ q 相矛盾的命题 q[6]。

例:若 a 是大于 1 的整数,且所有小于或等于 $\sqrt{a}$ 的素数都不能整除 a,则 a 是素数。

分析：原像关系结构:a 是大于 1 的整数，且所有小于或等于 $\sqrt{a}$ 的素数都不能整除 a;

未知原像目标:a 是素数;

映射:结论不成立;

映射关系结构:假设 a 是合数且 a=bc(b,c∈Z,且 b>1,c>1);

未知映射目标:a≠bc;

反演:a≠bc 与假设 a 是合数且 a=bc(b,c∈Z,且 b>1,c>1)相矛盾,说明假设不成立;

得解:a 是素数。

(5)把¬ q 作为前提,与已知前提中的 p1 相结合作为条件,推出与前提中的 p2 相矛盾的¬ p2[6]。

例:已知 A,B,C 为三个正角,且$(\sin A)^2+(\sin B)^2+(\sin C)^2=1$.求证:A+B+C<90°。

分析:原像关系结构:A,B,C 为三个正角,且$(\sin A)^2+(\sin B)^2+(\sin C)^2=1$;

未知原像目标:A+B+C<90°;

映射:结论不成立;

映射关系结构:假设 A+B+C≥90°且 A,B,C 为三个正角;

未知映射目标:$(\sin A)^2+(\sin B)^2+(\sin C)^2\neq 1$;

反演:$(\sin A)^2+(\sin B)^2+(\sin C)^2\neq 1$ 与题目中的已知条件(sinA)

(下转 264 页)

(上接 262 页)

$^2+(\sin B)^2+(\sin C)^2=1$ 是相矛盾的,说明假设不成立。

得解:$A+B+C<90°$。

综上所述,在用反证法进行解题的过程中,运用 RMI 原则的思想,能使解题思路变得更加清晰。作为一名数学教师,我们要教会学生学会用 RMI 原则这一数学思想方法进行解题,能够将问题化繁为简进行处理,从而提高学生的数学思维能力。

参考文献

[1]郑毓信.数学方法论[M].广西教育出版社,1995.
[2]孙宗明.数学证明方法[M].兰州:兰州大学出版社,1995.
[3]肖学平.智慧的阶梯-论数学思想方法的教与学[M].国防大学出版社,2002.
[4]徐利治.数学方法论选讲[M].华中工学院出版社,1988.
[5]唐松.关系映射反演原则在高中数学教学中的应用初探[C].上海师范大学,2007.
[6]钱珮玲,邵光华.数学思想方法与中学数学[M].北京:北京大学出版社,1999.