复变函数与高等数学内容比较

郭巧栋

（黑龙江工程学院理学院，黑龙江 哈尔滨 150000）

摘　要：复变函数与高等数学均属于解析课，两者有很多类似的知识点。现有的研究更多的是通过对两门课程的类比来提高课堂教学效率。本文着眼于两门课程的差异，不仅对课程内容进行了全面的比较，还对与之相关的典型教学实施案例进行了探讨，并提出了具体的实施步骤和重点。

关键词：复变函数；类比；比较研究；高等数学

【DOI】10.12231/j.issn.1000-8772.2021.07.246

1 引言

复变函数是数学里一门非常重要的基础课程。它的理论和方法不仅在数学上有很大的价值，而且对于未来与科学和工程相关的专业（如电子信息、电子工程与电气、自动化控制、交通工程等等）来说，也会引导到自然科学和工程技术领域上，是解决平面问题的一个非常强大的工具，如电磁学，流体力学，热学和弹性理论等方面。复变函数在复数域的微积分等概念，高等数学同样有很多类似的概念、理论和方法，所以许多老师倾向于使用类比的方法进行教学，在教学设计中，通过类比，激励学生学习，以达到提高教学效率和复习高等数学的双重影响。但是，在实际的教学实践中，我们还发现复变函数和高等数学“形似而不神似”，很多内容似乎是“相似”的，实则区别很大，绝对不能轻易略过，只有通过比较表面的问题，才能达到真正的核心主题，以实现复杂功能的独特魅力。基于此点，本文重点对两门课程的核心知识点进行了比较，并探讨了相关的差异。

2 课程内容比较

复变函数与高等数学不仅在知识体系上有着极大的相似之处，而且在初等函数、极限、微分、极限、级数的顺序上也有相似之处，但两门学科的差异却一一显现。首先，他们的出发点并不相同。在高等数学中，我们关注的是单值实变函数，而复变函数关注的是复数域上的单值函数或多值函数。因此，复变函数的几何性质是非常特殊的，它可以将平面上的曲面或图形映射到平面上的曲面或图形。它的形象不容易在二维或三维空间中表现出来，多值函数的引入则带来了更加复杂和丰富的几何结构。

作为复域上的微积分，复函数的大厦是建立在极限的概念上的。复函数极限的定义与高等数学中一元函数的定义非常相似。实际上，它在本质上与一般度量空间中极限的定义是一致的，它的一些性质，如有理运算规则，可以通过模仿高等数学中的相关内容来证明。但是，复函数的极限比单变量函数的极限要求更高：讨论单变量函数的极限时，左极限和右极限都存在，并等价于极限的存在；当我们讨论复变函数的极限时，要求函数 z 总是趋向于在邻近的任何曲线上以任何方式趋向于相同的常数 z_0。

从导数的内容上看，复函数与高等数学出现了非常本质的区别，高等数学中不存在柯西--黎曼方程，复函数中不存在中值定理（这只在经典教科书的范畴内讨论过）。复变函数的核心研究对象是解析函数，整个过程试图从各个角度探讨复变函数的性质。换句话说，分析函数是整个知识系统的中心部分。解析上它的规律性是很好的，它是高等数学中任何类型的函数（连续的，可微的，可积的）所不可比拟的。特别是它与积分和级数的关系是复变函数过程中所特有的。从几何上看，它的结构美丽而有趣，它是一个共形结构。如何利用解析映射的复合来实现不同复平面上的图之间的变换是复函数课程中很特殊的一个专题。

与高等数学相比，复变函数的知识体系是密切相关的。复变函数中积分与分析的特殊关系导致了柯西--古萨基本定理的成立。因此，可以立即推导出柯西积分公式和高阶导数公式。虽然这两个公式是以积分的形式提出的，但它们揭示了解析函数的重要性质。柯西积分公式反映了解析函数在区域内的值与边界之间的密切关系，即它在区域内任何一点的值都可以由它在边界曲线上的值来确定。从高阶导数公式可知，解析函数是无限可微的，因为它们的导数仍然是解析函数。进一步，根据柯西积分公式，我们可以证明泰勒展开式和洛朗展开式的存在性，由此得到“综合”留数定理。到目前为止，复变函数课程已经围绕着计算的核心内容进行了衔接，这是教学过程中需要注意的一条知识主线。

3 两门课程教学差异实例

3.1 为什么复变函数里没有中值定理

实施步骤：引导学生复习高等数学的相关内容，思考复变函数中中值定理的陈述和证明“失败”的原因，并举例说明。

要点：首先，你不能在复平面上比较大小，也就是说，没有有序关系，所以区间是不可用的；其次，我们不能讨论一个在线段上可微的函数，我们必须考虑一个包含它的区域；最重要的是导数，虽然它看起来像变化率，但并不像在高等数学中那样有用。例如，指数函数 exp(z) 是周期性的，但是它的导数仍然是，所以在复变函数中没有 Rolle 定理，因此也就没有其他的中值定理。

3.2 为什么高等数学里没有柯西——黎曼方程

实施步骤：引导学生分析柯西——黎曼方程的证明过程，详细了解复变函数的运算和求导的特殊性。

要点：虽然复变函数中导数的定义是“标准的”，但复数的特殊算法会导致两个复数相乘时实部和虚部发生特定的变化。此外，本质上，复变函数的极限要求的极限分别实部和虚部，所以双方的实部和虚部的方程求导后会产生特殊的约束，这种约束是柯西--黎曼方程的形式。因此，复函数在求导上与高等数学有着本质的区别，柯西——黎曼方程体现了更强的要求，这在一定程度上解释了解析函数的特殊性。

4 结束语

对两种事物进行比较有利于发现这两种事物的共性和个性，是各科学领域中一种很重要的研究方法，也是一种很重要的数学思维。对复变函数与高等数学的比较，同时可以加深对两门学科的认识和理解。在实际教育过程中，如果能对他们相似的知识点进行精炼，深入分析，提问设计，引导思考，提出它们的不同之处，并寻根溯源，就能够让学生们抓住问题的根本，把握学习的主线，构建明确的知识体系，从而全面提高数学素养。

参考文献

[1]同济大学数学系.高等数学[M].7 版.北京：高等教育出版社，2014.

[2]华东师范大学数学系.数学分析[M].4 版.北京：高等教育出版社，2010.

[3]王少辉，王洪涛.《高等数学》与《复变函数》之关系探讨[J].教育教学论坛，2015(4)：63-64.

[4]刘显全.复变函数教学法探讨[J].大学数学，2012，28(2)：155-158.