关于行列式的几种计算方法

崔飞飞
（江西理工大学理学院，江西 赣州 341000）

摘 要：行列式是线性代数中的常用的工具，在数学其他分支有着重要的作用。文中运用举例的形式介绍了行列式包括对角线法则、行列式的定义、化为上三角形行列式以及降阶法在内的不同解法。

关键词：行列式；对角线法则；初等变换；降阶
【DOI】10.12231/j.issn.1000-8772.2021.11.289

1 引言

行列式是线性代数中常用的工具，是线性代数教学中的核心内容，并在解析几何以及数学的其他分支有着重要的作用。行列式是排列整齐的数表，并将其限制在两个竖线内，看起来很有规矩，就像做人一样，有了规矩，才能画方画圆，天下事，都要有规矩。提醒学生做人做事要有规矩，有规矩方成大事的道理。由于行列式的在线性代数教学中的地位，因此对于行列式的计算就显得非常重要。教书育人如同解题过程，有多种方法。下面主要介绍行列式的几种计算方法，首先介绍对角线法则。

2 主要内容

2.1 利用对角线法则计算行列式

（1）二阶行列式的对角线法则：行列式的值为主对角线上两元素之积减副对角线上两元素之积。

例如：$D=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)-1\cdot(-2)=-1$。

（2）三阶行列式的对角线法则：三阶行列式的对角线法则与二阶行列式的不同。三阶行列式的对角线法则如下：

$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$.

需要注意的是，对角线法则只适合二阶和三阶行列式，对于更高阶的行列式则不适用对角线法则。以下面行列式为例介绍行列式的其他几种解法。

例 1 计算下面的行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

2.2 利用 n 阶行列式的定义计算行列式

首先给出 n 阶行列式的定义式：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}。$$

即行列式表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和。

例 1 的解法一：

行列式的值是取自不同行、不同列的 4 个元素乘积的代数和，其中四个元素若有一元素为零，那么其乘积为零。因此计算行列式时只需要计算出取自不同行、不同列的四个元素均为非零元的情况即可。由题可知行列式的第一列的唯一非零元为第二行的元素-1；而第二列的非零元有两个，一个是第一行的 1，另一个是第四行的 3，因此第二列的取法有两种 1 或 3；第三列和第四列取元素时同理。因此若第一列取第二行的元素-1，第二列取第一行的元素 1，第三列取第三行的元素 3，那么第四列只能取第四行的元素-1；若第一列取第二行的元素-1，第二列取第一行的元素 1，第三列取第四行的元素 1，那么第四列只能取第三行的元素-2；若第一列取第二行的元素-1，第二列取第四行的元素 3，第三列取第三行的元素 3，那么第四列只能取第一行的元素-1；若第一列取第二行的元素-1，第二列取第四行的元素 3，第三列取第一行的元素 2，那么第四列只能取第三行的元素-2，再给这些乘积冠以符号作和可得行列式的值。即

$$D=(-1)^{\tau(2134)}\cdot(-3)+(-1)^{\tau(2143)}\cdot 2+(-1)^{\tau(2431)}\cdot 9+(-1)^{\tau(2413)}\cdot 12=-4$$

若行列式为上三角形行列式，由行列式的定义可知，行列式的值为主对角线元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

由此结论可以得出。

下面介绍的计算行列式的一种常用方法。

2.3 将行列式化为上三角形行列式计算行列式

利用行列式的初等行（列）变换将行列式化为上三角形行列式，再运用上三角形行列式的值为主对角线元素的乘积，可得行列式的值。具体步骤为：如果第 1 列第一个元素为零，则将第 1 行与其他行交换使得第 1 列第一个元素不为零，然后将第 1 行元素的倍数加到其他行，使得第 1 列除了第一个元素以外其他元素均为零；再观察，若第 2 列的第二个元素为零，则将第 2 行与除第 1 行以外的其他行交换使得第 2 列第二个元素不为零，然后将第 2 行元素的倍数加到其他行，使得第 2 列自第三行开始所有元素均为零；然后观察第 3 列的第三个元素，…以此类推，直至使得行列式化为上三角形行列式，此时主对角线上元素的乘积就是行列式的值。

例 1 的解法二：

行列式的第 1 列第一个元素为零，现将第 1 行与第二行交换使得第 1 列第一个元素不为零；然后观察知，所得行列式第 1 列除第一个元素外其余元素全为零；再观察行列式，第 2 列的第二个元素为 1 是非零元，第三个元素为零而第四行元素为非零元 3，若使第 2 列的第 3 行及第 4 行元素均为零元，只需将第 2 行元素乘以-3 倍加到第 4 行即可；再观察新得的行列式，第 3 列第三个元素为非零元 3，第四个元素为非零元-5，若使第 3 列第 4 行元素为零元，只需将第 3 行的 $\frac{5}{3}$ 倍加到第 4 行即可。最后所得上三角形行列式的对角线元素作乘积为 4，而行变换过程中做了一次行变换，因此最后结果应乘以-1，最后结果为-4。

用初等行（列）变换将行列式化为上三角形过程要注意初等变

基金项目：江西省教改项目(JXJG-20-7-18)

换的性质的使用,如互换行(列),行列式变号,在计算过程中很容易忽略,造成错误。

2.4 利用降阶法计算行列式

首先给出行列式按照某一行或某一列展开的定理,如下:

定理 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}.i=1,2,\cdots,n,$

或 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}.j=1,2,\cdots,n$。

例 1 的解法三:

运用按行(列)展开计算行列式时,应选择零元素尽可能多的行(列)进行展开。经观察发现例 1 中行列式的第 1 列只有一个非零元,按照第 1 列展开可知,行列式等于 $a_{21}A_{21}$, $a_{21}=-1$, $A_{21}=(-1)^3M_{21}$,

其中 $M_{21}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&3&-2\\3&1&-1\end{vmatrix}$,下面计算 M_{21}, M_{21} 按照第一列展开可得

$a_{11}A_{11}+a_{31}A_{31}$, $a_{11}=1$, $a_{31}=3$, $A_{11}=\begin{vmatrix}3&-2\\1&-1\end{vmatrix}=-1$, $A_{31}=\begin{vmatrix}2&-1\\3&-2\end{vmatrix}=-1$。

即 $D=(-1)\cdot(-1)^3[1\cdot(-1)+3\cdot(-1)]=-4$。

在例 1 计算过程中发现,每按列展开一次,都会使原行列式降一阶,因此按行(列)展开计算行列式的方法称为降阶法。在计算零元素较少或者高阶行列式时,直接应用按行(列)展开计算行列式,运算量较大。因此,在计算行列式时,可先将行列式中某一行(列)运用初等行(列)变换化为仅含有一个非零元的形式,再按照此行(列)展开,如此进行下去,直到化为二阶或三阶行列式。以下列行列式的计算为例。

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\-1&0&1&2\\1&3&2&-1\\1&3&2&-1\end{vmatrix}.$$

解:若直接应用按行(列)展开计算行列式。观察行列式,第二列中有一个零元,可选择按照第 2 列展开,这时会得出三个三阶行列式,计算量较大。因此可选择将第二列化为仅有一个非零元的形式,再按照第 2 列展开。

将第 1 行的(-1)倍加到第 3 行,将第 1 行的(-3)被加到第 4 行,可得

$$D=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\-1&0&1&2\\1&0&1&-1\\-2&0&-4&2\end{vmatrix}.$$

将此行列式按照第 2 列展开得

$$D=(-1)^3\begin{vmatrix}-1&1&2\\1&1&-1\\-2&-4&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&2\\1&1&-1\\-2&-4&2\end{vmatrix},$$

对此行列式将第 1 行的 1 倍加到第 2 行,第 1 行的-2 倍加到第 3 行,可将行列式化为第 1 列元素除第一个元素-1 外均为零元素,按照第 1 列展开有

$$D=(-1)^4\begin{vmatrix}2&1\\-6&1\end{vmatrix}=2.$$

事实上,很多时候需要借助行列式的性质对行列式进行整理。比如行列式每一行的元素加在一起的和相同时,可将第二列至最后一列的元素都加到第一列,那么第一列的元素相同,这时将第一列的公因子提出,第一列所有的元素均为 1。再将第一行的-1 倍分别加到第二行至最后一行,此时行列式的第一列的元素,除了第一行元素为 1 以外,其他元素均为零,可用按列展开方法进行计算。

除此以外,利用数学归纳法也是比较常见的一种方法,主要针对 n 阶行列式的计算。若行列式某行(或某列)零元素较多或者运用行列式的性质可将行列式的某行(或某列)化为零元素较多的形式,可将此行列式按行(或列)展开,对展开式进行整理,得出行列式的递推公式,依此可将行列式依次降阶,转化成二阶或者三阶行列式,进而得出结果。

3 结束语

计算行列式时,可根据行列式的特点适当选用行列式的解法。如果是二阶或三阶行列式可选择使用对角线法则。对于高阶行列式,如果行列式中零元较多可直接使用按行(列)展开计算,否则可运用初等变换将行列式化为上三角形行列式计算或将某一行(列)化为仅有一个非零元用降阶法来计算。

参考文献

[1]杨威,高淑萍,李兵斌.论矩阵等式在线性代数中的重要性[J].大学教育,2021(3):116-119.

[2]刘敬刚,郭燕.融入数学建模思想的线性代数案例教学研究[J].赤峰学院学报,2020(1):15-17.

[3]苏德矿.高等数学教学如何与中学数学内容及教学方法有效地衔接[J].中国大学数学,2013(5):47-49.

[4]宋伟灵,吴泽颖.高等数学的学习调查与研究[J].科技通讯,2020(9):145-146.

作者简介:崔飞飞(1986,12-),女,汉,河北石家庄,硕士研究生,助教,研究方向:微分方程稳定性。